



## A compreensão do conceito de taxa de variação por meio de atividades experimentais: possibilidades via software geogebra

Eduardo Machado da Silva<sup>1</sup>

**Resumo:** esta investigação tem como objetivo analisar o comportamento dos estudantes frente ao processo de aprendizagem quando lidam com as manipulações dos parâmetros de funções reais. Acredita-se que o discente deve ser o protagonista da sua aprendizagem enquanto o docente deve apresentar atividades e situações que os façam alcançar isso. As atividades apresentadas e a coleta dos dados ocorreram na plataforma MS TEAMS durante as aulas remotas devido a pandemia do novo coronavírus. O assunto tratado e discutido nessas aulas foi a Taxa de Variação Instantânea abordada na disciplina Cálculo Diferencial e Integral em um curso superior de formação de tecnólogos. A ideia dos experimentos envolvia analisar o comportamento algébrico e gráfico de uma situação, na qual os estudantes foram convidados a participar expressando seus pensamentos, hipóteses e questionamentos. Tornar o estudante o ator principal do seu processo de aprendizagem foi possível pela utilização de um software de Geometria Dinâmica. Com ele os estudantes podiam manipular os parâmetros da função envolvida e em tempo real ver e analisar o que estava ocorrendo. A análise dos dados foi realizada por uma abordagem qualitativa, pois o interesse dessa pesquisa era investigar o comportamento dos estudantes em questões que envolviam a análise das taxas de variação, além disso, desejava-se dar voz a eles para se tornarem os atores principais. Notou-se que os experimentos e atividades propostas proporcionaram a eles o protagonismo do processo de aprendizagem, pois eles conseguiram apresentar seus pensamentos e por meio das manipulações construir o seu conhecimento matemático.

**Palavras-chave:** Ensino de Cálculo; Taxa de Variação; Simulações Computacionais; GeoGebra.

**Abstract:** this investigation aims to analyze the behavior of students facing the learning process when dealing with manipulations of parameters of real functions. It is believed that the student must be the protagonist of their learning, while the teacher must present activities and situations that make them achieve this. The activities presented and data collection took place on the MS TEAMS platform during remote classes due to the new coronavirus pandemic. The subject treated and discussed in these classes was the Instantaneous Variation Rate addressed in the Differential and Integral Calculus discipline in a higher education course for technologists. The idea of the experiments involved analyzing the algebraic and graphical behavior of a situation, in which students were invited to participate by expressing their thoughts, hypotheses and questions. Making the student the main actor in their learning process was possible through the use of Dynamic Geometry

<sup>1</sup> Faculdade de Tecnologia "Prefeito Hirant Sanazar" – FATEC/OSASCO. [eduardo.silva97@fatec.sp.gov.br](mailto:eduardo.silva97@fatec.sp.gov.br)

software. With it, students could manipulate the parameters of the function involved and, in real time, see and analyze what was happening. Data analysis was performed using a qualitative approach, as the interest of this research was to investigate the behavior of students in issues involving the analysis of rates of change, in addition to giving them a voice to become the main actors. It was noted that the proposed experiments and activities provided them with the leading role in the learning process, as they were able to present their thoughts and, through manipulations, build their mathematical knowledge.

**Keywords:** Teaching of Calculus; Rate of Change; Computational Simulations; GeoGebra.

## 1. Introdução

O ensino dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral<sup>2</sup> em cursos de formação tecnológica exigem, segundo nosso ponto de vista, um apelo tanto geométrico quanto gráfico para sua aprendizagem. Acredita-se que o desenvolvimento algébrico pode não ser suficiente para que os estudantes se apropriem e façam uso das ideias tratadas nessa disciplina.

Um dos modelos das aulas de Cálculo se baseia na transmissão do conteúdo por meio da apresentação pelo docente responsável fazendo uso do quadro. “Ainda é frequente encontrarmos colegas de disciplinas da área de Exatas que repetem o estilo de aula de seus antigos professores, talvez não porque achem que é a melhor forma, mas porque não sabem fazer diferente” (FUSCO, 2007, p. 38)

Uma crítica a esse modo de lecionar/trabalhar com a disciplina Cálculo é:

Os professores de Cálculo sabem o quanto de desistência ou baixo aproveitamento tem nossos alunos. Será que são os alunos que não tem capacidade ou os métodos de ensino ainda são arcaicos em face a revolução das novas tecnologias? Mesmo vivendo na era do Conhecimento, na era das Redes Sociais, praticamos a educação da Era Industrial (D'AMBRÓSIO e VALENTE, 2016, p. 23)

Dessa maneira, corrobora-se com a posição:

É quase consenso a ineficiência dos cursos tradicionais de Cálculo apoiados essencialmente em aulas expositivas de giz e lousa, de modo que temos muito a ganhar tentando desenvolver trabalhos alternativos.

É um pouco difícil para professores que ensinam há bastante tempo, reformular suas aulas mudando abordagens tradicionais de determinados assuntos. Mas é preciso pensar que os avanços da ciência e a facilidade em utilizar recursos diversos tornam obsoletos determinados procedimentos. Não é mais possível ignorar o impacto da tecnologia e a sua influência nas salas de aula. (FRANCHI, 1995, p. 42)

Assim, por mais que os professores de Cálculo se esforcem para apresentar as ideias matemáticas dessa disciplina no quadro há ainda a questão estática envolvida nessa abordagem, ou seja, não é possível, por exemplo,

---

<sup>2</sup> Optamos em usar o termo Cálculo para designar a disciplina Cálculo Diferencial e Integral com intuito de simplificar a linguagem.

movimentar os pontos do gráfico de uma função ou a inclinação de uma reta para analisar o seu comportamento.

Na tentativa de buscar uma outra perspectiva para a aprendizagem dos conceitos da disciplina Cálculo, no contexto da formação de tecnólogos, apresentamos duas atividades desenvolvidas com os estudantes na qual eles puderam realizar experimentos alterando os parâmetros (coeficientes) de funções e analisar o comportamento gráfico para compreender as ideias de Taxa de Variação Média (TVM) e Taxa de Variação Instantânea (TVI).

Essa abordagem contempla possibilidades nas quais os estudantes podem enxergar o que está ocorrendo. Com isso, acredita-se na possibilidade de torná-los autônomos no processo de aprendizagem, pois levantam e testam suas hipóteses. Estas podem ser refutadas ou comprovadas por meio de provas matemáticas formais.

Assim, o objetivo desse trabalho consiste em destacar as atitudes, comportamentos e as falas dos estudantes de cursos de formação tecnológica diante de situações nas quais eles podem alterar os parâmetros das funções envolvidas e analisar o comportamento gráfico e analisar as taxas de variação das funções de uma certa situação. Complementar a esse fato, nosso interesse tem como foco analisar o desenvolvimento algébrico das ideias apresentadas por eles, ou seja, como eles desenvolvem e apresentam ideias matemáticas. Dessa maneira acredita-se que eles podem levantar e comprovar (ou não) hipóteses, além de construir o seu conhecimento matemático tornando-se os atores principais do processo de aprendizagem.

## **2. Fundamentação Teórica**

O estudo e a análise de taxas de variação corresponde a interpretação de um fenômeno que está se modificando, transformando, mudando. O que está por trás dessa ideia é que ao alterarmos o valor de uma variável (independente) do fenômeno a outra variável (dependente) também se altera. Desse modo, uma ferramenta que permite analisar tais alternâncias e os comportamentos entre as variáveis são as taxas de variação média e instantânea. Além disso, essa ideia está presente em situações práticas do cotidiano, por isso interpretá-las corretamente pode ser considerado uma das competências matemáticas a serem desenvolvidas.

O conceito de derivada de uma função está relacionado ao estudo das taxas de variação e com o coeficiente angular de uma reta tangente. Na pesquisa de (BISOGNIN e BISOGNIN, 2018) elas relatam que professores em curso de formação continuada (mestrado em ensino de Matemática) apresentaram dificuldades quanto a compreensão dessa ideia. Segundo elas:

Percebemos, por meio da ideia de imagem conceitual e definição conceitual, que a aprendizagem de conceitos, analisada por meio do conceito de taxa de variação, não está bem consolidada. Certamente, o ensino de conceitos precisa ser revisto e aperfeiçoado. (BISOGNIN e BISOGNIN, 2018, p. 37)

Considerando a variável  $x$  como independente e  $y$  como dependente temos que se  $x$  variar de  $x_1$  a  $x_2$  sua variação é dada por  $\Delta x = x_2 - x_1$  e consequentemente em relação a  $y$  temos  $\Delta y = y_2 - y_1$  (ou  $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ ). A interpretação do quociente entre as diferenças  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  consiste na taxa de variação média que graficamente é a reta secante ao gráfico de uma função  $f$  (figura 1). Se  $\Delta x$  sofrer uma pequena variação, ou seja, se  $\Delta x$  tender a zero e se o limite desse quociente existir, então temos a taxa de variação instantânea que graficamente (figura 1) pode ser interpretada pela reta tangente ao gráfico da função  $f$  em um ponto específico  $x_0$ . Assim, “Sempre que a função  $y = f(x)$  tiver uma interpretação específica em uma das ciências, sua derivada terá outra interpretação específica, como uma taxa de variação.” (STEWART, 2015, p. 202)

A citação anterior mostra que as taxas de variação podem ser utilizadas para interpretar uma série de fenômenos. Esses podem ser relacionados à Física considerando o estudo, por exemplo, da velocidade (média e instantânea) da aceleração (média e instantânea), corrente elétrica. Também pode ser considerados fenômenos termodinâmicos onde a análise recai sobre as variáveis pressão, temperatura ou volume. O estudo de concentrações de uma substância na Química permite o uso dessas taxas para analisar seus comportamentos. Na Economia emprega-se as taxas de variação para interpretar, por exemplo, o custo marginal.

Quanto aos fenômenos envolvendo a TVM e a TVI (ORTS, LLINARES e BOIGUES, 2016) apontam que a reta tangente consiste em um conceito que permite interpretar geometricamente a derivada de uma função em um ponto e ao mesmo tempo ela é a reta que melhor se aproxima localmente de uma função. Os autores destacam ainda que conhecer ações sobre os conceitos matemáticos implica na realização de cálculos procedimentais. A repetição desses processos em exemplos específicos permite que o conceito seja interiorizado e dessa maneira se estruturam em forma de um sistema e quando o estudante busca solucionar um problema matemático o traz à tona.

As ideias propostas por (ORTS, LLINARES e BOIGUES, 2016) vão ao encontro da perspectiva teórica do Pensamento Matemático Avançado proposto por (TALL, 2002). Desse modo a interiorização de um conceito matemático converge para a ideia de encapsulação. Esta pode ser compreendida como formalizações sucessivas de um conceito e ocorre quando os estudantes são capazes de descapsular retornando ao início do processo, ou seja:

A construção de relações é importante pois podemos considerar que as coisas têm significado pela forma como estão relacionadas com outras coisas. As pessoas constroem o significado de uma nova ideia ou processo relacionando-as com ideias ou processos que já compreenderam anteriormente. O ensino deve preocupar-se com o conhecimento informal dos alunos e relacionar a matemática que se pretende ensinar com esse conhecimento.

Não devemos no entanto pensar no desenvolvimento da compreensão como um simples acrescentar de novos conceitos e processos ao conhecimento existente. Desenvolver a compreensão envolve a criação de estruturas de conhecimento ricas e integradas, estruturas estas que dão origem a uma aprendizagem com compreensão. (DOMINGOS, 2001, p. 116)

Pautando-se nas perspectivas anteriores buscou-se desenvolver a ideia de TVI com estudantes de um curso de graduação tecnológica indicando a eles como o conhecimento matemático é desenvolvido e como as relações existentes estão interligadas, ou seja, a partir de uma ideia se apropria de outra. Desse modo, partindo-se do problema da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto  $x_0$  há possibilidade de novas interpretações e possibilidades.

O problema da reta tangente já havia sido tratado com os estudantes em outro momento do curso, desse modo esperava-se que eles pudessem retomá-lo para que desenvolvessem o conceito de TVI. Esse fato relaciona-se com o processo de encapsulação e promove características do pensamento matemático tanto elementar quanto o avançado. Isto depende do conhecimento de cada estudante, por isso cada um se apropria do conhecimento e o interpreta conforme suas experiências prévias.

No desenvolvimento deste trabalho adotou-se um software para que os estudantes pudessem visualizar e manipular os parâmetros de uma função. As múltiplas representações e a possibilidade de realizar experimentos promovem dois aspectos: o primeiro é que o discente pode explorar diversas situações, ou seja, a utilização do software permite que ele crie e investigue situações e a partir delas levante e teste suas hipóteses confrontando ideias. A segunda é que nessa perspectiva eles se tornam autônomos do processo de ensino e aprendizagem, pois são livres para alterar os parâmetros e analisá-los.

Corroborando com isso crê-se que: “[...] trabalhar um conceito, levando-se em consideração as suas múltiplas representações, é proporcionar aos alunos oportunidades de criar imagens ricas de significados que permitam a compreensão do conceito.” (TALL, 1994)

O software escolhido para o desenvolvimento da proposta foi o GeoGebra<sup>3</sup> porque além de ser gratuito há versões *on-line* e para *smartphones*. Além disso, é possível fazer a instalação dele a partir do *download* caso seja a preferência do estudante. Outro aspecto levado em consideração para a escolha desse programa é que há possibilidade de compartilhar construções na plataforma MS TEAMS, o que corresponde a um componente facilitador para a comunicação entre o docente e os discentes.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo analisar as atitudes e ações dos estudantes de um curso de formação tecnológica frente a simulações computacionais. Desse modo entende-se ser possível ver e avaliar como eles constroem seus conhecimentos matemáticos quando lidam com a variação dos parâmetros de uma função.

### 3. Aspectos Metodológicos

A atividade foi proposta e desenvolvida no 1º semestre de 2021 com os estudantes do curso de Tecnologia em Automação Industrial da Fatec/Osasco. Devido a pandemia do novo coronavírus ela ocorreu remotamente no ambiente virtual da plataforma MS TEAMS.

Para análise da atividade utilizamos como proposta metodológica a pesquisa qualitativa, isso porque, segundo D’Ambrósio (2006, p. 19) em (BORBA e ARAÚJO, 2006) no prefácio do livro Pesquisa Qualitativa em Educação

---

<sup>3</sup> [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Matemática indica que este tipo de pesquisa “[...] é o caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e suas ideias, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas”.

Pesquisas de cunho qualitativo têm por objetivo fornecer informações de caráter descritivos que priorizam os significados das ações. Segundo (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47 - 51) são características inerentes à pesquisa qualitativa:

- A fonte direta para obtenção dos dados consiste no ambiente natural donde a pesquisa se desenvolve;
- Tem como caráter a descrição dos dados;
- Os interesses dos investigadores se concentram nos processos e não os resultados ou produtos;
- A análise dos dados na pesquisa qualitativa é realizada de modo indutivo;
- Os investigadores buscam analisar o significado dos processos.

Esperava-se que o desenvolvimento da atividade proporcionasse aos estudantes um novo olhar sobre o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e que agregassem a eles uma maneira de pensar e raciocinar sobre situações semelhantes. Além disso, o uso de recursos computacionais, como o GeoGebra, oferece mecanismos de manipulação de parâmetros o que favorece a visualização dos experimentos e isso permite aos estudantes explorar e apresentar suas interpretações.

A coleta dos dados ocorreu por meio de conversas com os estudantes que participaram do experimento. Eles eram inquiridos pelo professor a respeito do que estavam observando enquanto realizavam os experimentos. Era solicitado que eles descrevessem o que estava acontecendo quando manipulavam os comandos e parâmetros no GeoGebra. Além disso, era indicado que eles fizessem anotações e que eles argumentassem sobre determinadas conclusões encontradas.

Os dados coletados foram registrados em um caderno de anotações do pesquisador para que fossem analisados após a realização da atividade. Outra característica que auxiliou nos exames dos dados foi a gravação da aula, isso nos proporcionou revisar algumas falas e discussões que aconteceram além de complementar os registros.

#### **4. Análise e Discussão dos Resultados**

O experimento começou uma semana antes da aula na qual seria introduzido o assunto Taxa de Variação. O professor responsável pela disciplina solicitou aos estudantes que assistissem ao vídeo “Newton, Leibniz e Usain Bolt” disponível no site da Khan Academy<sup>4</sup> e YouTube<sup>5</sup>. O objetivo dessa ação era que os estudantes pudessem ter ideia do tipo de problema que seria abordado. Além disso, esperava-se que eles despertassem a atenção para a diferença entre TVM e TVI como proposto no vídeo.

---

<sup>4</sup> Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>

<sup>5</sup> Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MgzKlqNGu0M>

Ao iniciar a aula o professor questionou os estudantes se eles haviam assistido ao vídeo e pediu que eles relatassem o que haviam observado. Alguns estudantes (E5, E7, E13) relataram que a diferença entre as taxas de variação é que uma determinava o valor médio da velocidade enquanto a outra, quando  $\Delta x \rightarrow 0$  o valor da velocidade do corredor em um instante específico da trajetória. Outros estudantes (E2, E4 e E20) destacaram que Usain Bolt não corre sempre com a mesma velocidade e que durante a prova dos 100m livre a velocidade era variável, que ele começava a prova com uma velocidade baixa e que aos poucos ela vai aumentando até chegar “no pico” (valor máximo) e que no final o velocista a reduzia.

Outra questão, que foi levantada pelo estudante E23, estava relacionada a unidade de medida da velocidade. Ele interpretou que se Usain Bolt a mantivesse constante durante toda a trajetória seria capaz de andar pouco mais de dez metros por segundo o que para ele era praticamente impossível. Foi necessário alertá-lo que a velocidade máxima que o atleta atinge, como destacado no vídeo, era de 30 milhas por hora, que pode ser compatível com a de um automóvel, mas que isso ocorre em um tempo específico, por isso ela era denominada de velocidade instantânea.

Após essa discussão inicial foi apresentado aos estudantes as definições de TVM (equação 1) e TVI (equação 2) e como a primeira implica na segunda usando um recurso gráfico.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{Eq. (1)}$$

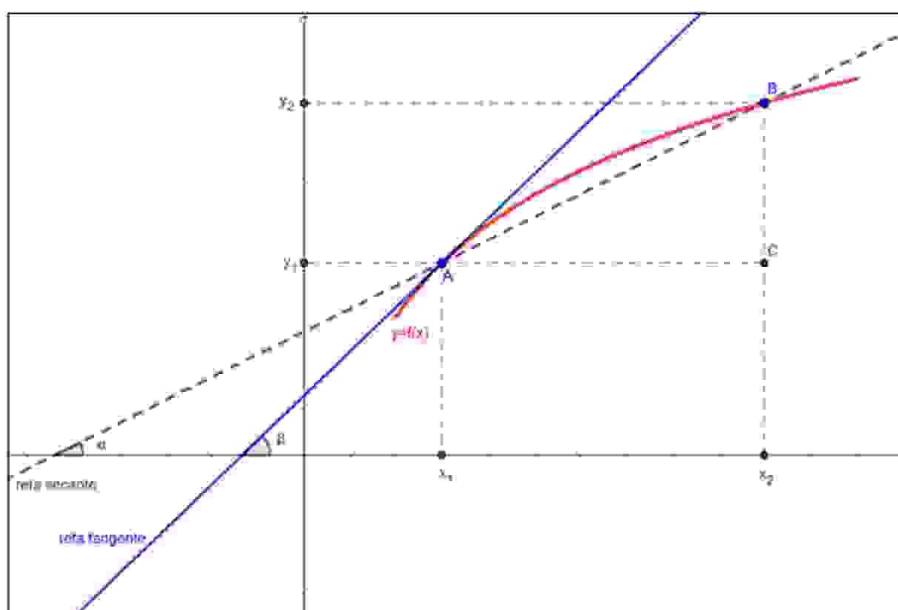
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad \text{Eq. (2)}$$

Nesse momento foi retomado junto aos estudantes a ideia geométrica que motiva a definição de derivada relacionada a reta tangente ao gráfico de uma função  $f(x)$  em um ponto  $(x_0, f(x_0))$ . Para isso, compartilhou-se com os estudantes, por meio da plataforma MS TEAMS, uma construção (figura 1) para que eles manipulassem e analisassem um dos parâmetros. Optou-se pelo compartilhamento da construção para “ganhar” tempo, ou seja, que gastássemos o tempo disponível em outras possibilidades de análise e atividades.

Assim, nessa primeira atividade foi solicitado aos estudantes que eles movimentassem o ponto  $B$  no gráfico (figura 1) e analisassem o comportamento gráfico das retas tangente e secante.

A manipulação do ponto  $B$  implica na alteração do coeficiente angular da reta secante. Assim, quando este se aproxima de  $A$  a reta secante tende a se aproximar da reta tangente.

Figura 1: primeira proposta de atividade



Fonte: Autoria própria

Durante a simulação os estudantes foram inquiridos sobre o que observavam. Os estudantes (E12, E18, E30, E33) disseram que ao movimentarem o ponto  $B$  aproximando-o de  $A$  a reta secante se aproxima da reta tangente. Foi pedido a eles que explicassem o significado dessa afirmação. E12 e E33 pontuaram que  $x_2$  se aproxima de  $x_1$  e conseqüentemente  $y_2$  de  $y_1$ . Além disso, foi questionado se eles tinham notado outro aspecto. E15 observou que o ângulo  $\alpha$ , formado pelo eixo das abscissas e a reta secante se aproximava do ângulo  $\beta$  composto pela intersecção entre o eixo dos  $x$  e a reta tangente.

Na sequência da atividade eles foram inquiridos, pelo professor da disciplina, sobre a relação dessa situação com o vídeo apresentado. Eles não conseguiram estabelecer uma aproximação entre as ideias apresentados. Desse modo, o docente optou em fazer um breve relato histórico sobre o problema, destacando o raciocínio de Newton.

Notou-se que os estudantes continuaram sem entender a conexão entre as situações. Inferiu-se isso devido ao silêncio no ambiente remoto e a pouca participação no *chat*. Até que um dos estudantes (E13) disse que para ele o ponto de tangência entre a reta tangente e gráfico da função representava a velocidade de Usain Bolt em cada instante da trajetória. O estudante analisou corretamente a ideia e a impressão dada é que os demais conseguiram acompanhar a ideia proposta.

Assim, enfatizou-se com os estudantes que as ideias da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto  $(x_0, f(x_0))$  e a TVI estavam relacionadas e que além disso elas representavam o mesmo conceito matemático, porém em situações diferentes. Enquanto na primeira circunstância a derivada estava relacionada ao coeficiente angular da reta, na segunda esse conceito se relacionava com a ideia de velocidade instantânea. Nesse momento, alguns estudantes (E12, E18, E30, dentre outros) relataram que eles já haviam estudado essa ideia na disciplina de Física no semestre anterior. Desse modo, foi dito a eles que isso estava certo e que apesar das disciplinas serem “distintas” a ideia é



mesma em qualquer contexto e que isso poderia ser levado a problemas com mesma característica.

Sendo este o mote, foram desenvolvidas outras atividades envolvendo diversos contextos e cenários para serem avaliados. O objetivo disso era que os estudantes notassem que uma ideia do campo da Matemática pode ser aplicada em outras situações e que em cada uma delas há uma interpretação do conceito de derivada de uma função em um ponto.

Destaca-se outra situação que os estudantes analisaram. Esta envolve a equação de Torricelli<sup>6</sup>. Este problema foi retirado de (STEWART, 2015, p. 211) e tem o seguinte enunciado:

Se um tanque tem 5000 galões de água, que escoam pelo fundo em 40 minutos, a Lei de Torricelli dá o volume  $V$  de água que restou no tanque depois de  $t$  minutos como:  $V(t) = 5000 \left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$  para  $0 \leq t \leq 40$ . Encontre a taxa segundo a qual a água está escoando do tanque depois de (a) 5 minutos, (b) 10 minutos, (c) 20 minutos e (d) 40 minutos. Em que instante o escoamento é mais rápido? E mais vagaroso? Resuma o que você encontrou.

A solução do problema iniciou-se com a interpretação geométrica. Para isso, os estudantes utilizaram o GeoGebra. A ajuda do professor da disciplina em alguns momentos da atividade foi necessária, pois ele precisou indicar alguns comandos aos discentes para que estes pudessem realizar a construção no software.

Desse modo, o professor indicou que eles usassem o comando: Se ( $0 \leq x \leq 40$ ,  $5000(1 - 1/40x)^2$ ) para a construção do gráfico da função. A Nesse momento o docente sugeriu, mas deixou a critério deles algumas formatações que tinham como objetivo ajudar na visualização.

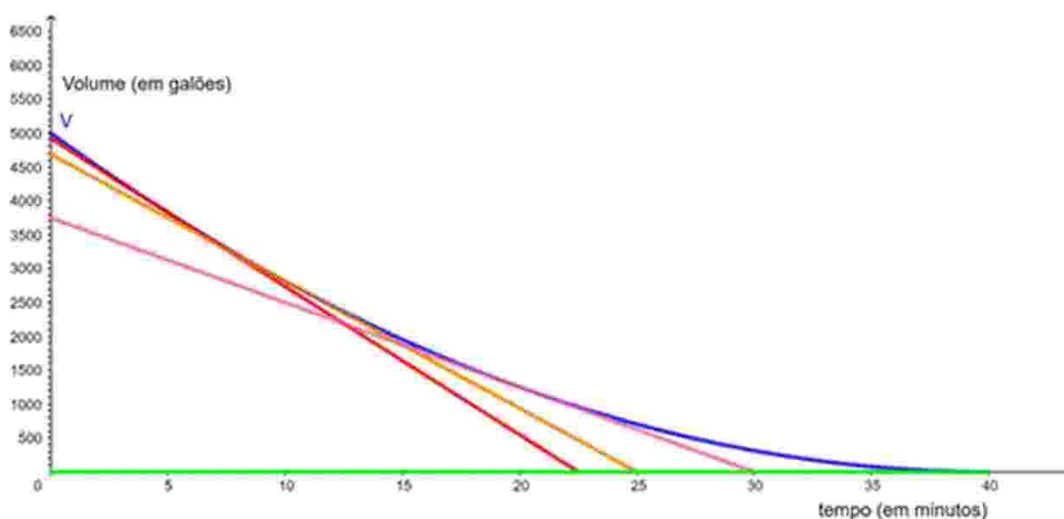
Na etapa seguinte foi solicitado aos estudantes que eles traçassem as retas tangentes (uma para cada) conforme indicavam os itens (a), (b), (c) e (d) do enunciado. Os estudantes não tiveram dificuldade em realizar essas construções, pois já estavam familiarizados. Nesse momento foram questionados sobre o que estava ocorrendo. Os estudantes (E12 e E23) destacaram que a vazão da água é mais rápida no início do fenômeno e depois ela vai diminuindo. Eles foram questionados pelo docente como haviam percebido isso. E eles responderam que avaliaram a inclinação das retas tangentes. Outros (E7, E10 e E21) também fizeram observações semelhantes.

A construção dessa etapa ficou com a seguinte configuração:

---

<sup>6</sup> Evangelista Torricelli (1608 – 1647): físico e matemático italiano.

**Figura 2:** construção geométrica dos itens (a), (b), (c) e (d) da 2ª atividade



Fonte: construção elaborada e compartilhada pelo estudante (E12)

O passo seguinte consistiu na construção das retas tangente para um valor genérico " $a$ ", ou seja, ao invés de usar um valor específico deveriam considerar um " $a$ " qualquer. Para isso, os estudantes deveriam usar um controle deslizante (comando do GeoGebra para manipulação de parâmetros) para simular o comportamento da vazão da água. Com essa elaboração, os estudantes podiam acionar a opção "rastros" do GeoGebra. Isso permitia a eles visualizarem as "fotografias" da variação do volume de água minuto-a-minuto.

Após a realização da atividade por meio do GeoGebra os estudantes foram inquiridos sobre alguns aspectos dessa construção. Uma delas foi quanto a uma das questões do problema que tratava sobre a "velocidade" de escoamento. O aluno (E12) destacou que a velocidade da vazão era maior no início do processo e justificou isso explicando que no tempo ( $t = 0$ ) ou próximos dele o volume de água é maior e por conta da ação da gravidade a vazão ocorre com maior volume.

Outros discentes concordaram com a posição apresentada pelo colega. Um deles (E33) complementou dizendo que no começo do experimento, como há mais água no reservatório, ela empurra a parte que está próxima ao orifício com mais força. Ocorreram outras discussões entre os estudantes nesse sentido e eles concordaram, apresentando ideias e justificativas diferentes que no começo do processo de esvaziamento do tanque é mais rápido. Eles também se apoiaram na simulação para justificarem tal posição, alegando a variação do coeficiente angular.

Na etapa seguinte os estudantes resolveram a questão algebricamente, ou seja, utilizando as mídias "tradicionais" lápis e papel apresentaram suas soluções. Destaque-se que alguns deles tiveram dificuldades nesse momento. Determinados discentes não conseguiram realizar os cálculos de modo adequado. Outros não sabiam como representar a situação nessa mídia. Em algumas dessas situações o professor precisou intervir para auxiliá-los.

A utilização do GeoGebra *on-line* e a versão para *smartphone* ajudaram no desenvolvimento das atividades, pois proporcionou que todos os estudantes participassem da atividade. Entretanto algumas dificuldades ocorreram: uma delas foi relacionada a manipulação do software tanto na versão *on-line* quanto

nos *smartphones*, ou seja, eles não conseguiam encontrar algumas janelas e comandos. Outro obstáculo foi com relação a digitação dos comandos, tinham estudantes com dificuldades de digitação. Para superar isso, era compartilhado no *chat* da plataforma MS TEAMS os comandos para que eles copiassem e colassem no experimento deles.

Entende-se que a aplicação das atividades apresentadas (dentre outras não discutidas neste trabalho) proporcionou aos estudantes do curso de Automação Industrial da Fatec/Osasco serem os protagonistas do processo de aprendizagem. Isso porque eles participaram da aula expondo seus pontos de vistas, apresentando e justificando suas hipóteses.

Destaca-se que uma das características que proporcionou a eles terem autonomia quanto a aprender foi a utilização do GeoGebra, isso porque eles puderam manipular os parâmetros de funções e verificar em tempo real o que acontecia. Desse modo, o trabalho manual e procedimental de cálculos/contas ficou a cargo do *software*, assim tiveram mais tempo para discussões teóricas e apresentação de ideias.

A utilização do vídeo, como uma mídia alternativa, introduzindo os estudantes aos assuntos que seriam tratados foi outro fator que os motivou, pois além de ser um vídeo que relata e trata de uma situação real fez com que alguns deles procurassem outros vídeos relacionados ao tema.

Outro ponto que foi possível observar no desenvolvimento das atividades é que os estudantes puderam observar e compreender o conceito de derivada. Isso porque a partir da apropriação da ideia da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto  $x_0$  ampliaram suas ideias para TVI, que é uma das consequências desse conceito. Isso converge para a proposta de (ORTS, LLINARES e BOIGUES, 2016). Essa característica indica que os estudantes começaram a desenvolver aspectos do pensamento matemático avançado, pois encapsularam e descapsularam os conceitos.

Ao encontro do que propuseram (D'AMBRÓSIO e VALENTE, 2016), (FUSCO, 2007) e (FRANCHI, 1995) a mudança de perspectiva relativa a apresentação dos conteúdos de Cálculo proporcionou aos estudantes serem os atores principais do processo de aprendizagem e o papel do professor consistiu em procurar meios e alternativas para que eles alcançassem os objetivos.

## 5. Considerações Finais

O objetivo desse trabalho foi relatar atitudes dos estudantes de um curso de formação tecnológica quando se encontram na posição de protagonistas do processo de aprendizagem quando manipulam os parâmetros de funções reais. Compreende-se que a utilização de recursos computacionais favorece o desenvolvimento dessa característica, pois verificou-se que os estudantes demonstraram um interesse maior quando se compara com as aulas expositivas. Isso indica que as “novas perspectivas” do ensino de Cálculo precisam chegar aos professores para que as mudanças possam ocorrer.

A proposta em desenvolver o conteúdo TVI por meio de um recurso computacional proporcionou a eles alcançarem algumas características do pensamento matemático avançado. Além disso, as discussões que ocorreram durante a aula, mesmo no ambiente remoto de ensino e aprendizagem,

mostraram que os discentes se tornaram os protagonistas enquanto o professor foi o agente responsável em tornar isso possível.

Por fim, enfatiza-se que as atividades propostas aos estudantes ofereceram a eles a compreensão múltipla do conceito de derivada, vendo esta como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto de abscissa  $x_0$  e associar a TVI.

## Referências

BISOGNIN, V.; BISOGNIN, E. Compreensão do Conceito de Taxa de Variação por Professores em Formação Continuada. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, p. 26 - 40, Abril 2018.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto Alegre: Porto, 1994.

BORBA, M. D. C.; ARAÚJO, J. D. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

D'AMBRÓSIO, U.; VALENTE, C. Os Primórdios da Epistemologia do Cálculo: dos babilônios a Arquimedes. In: FONSECA, L. **Didática do Cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem**. São Paulo: Livraria da Física, 2016.

DOMINGOS, A. Contextos Escolares que Favorecem o Pensamento Matemático Avançado. In: MOREIRA, D., et al. **Matemática e comunidades: a diversidade social no ensino-aprendizagem da matemática**. [S.l.]: Instituto de Inovação Educacional, 2001. p. 116 - 130.

FRANCHI, R. H. D. O. U. Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. **Temas e Debates**, Blumenau, p. 39 - 43, 1995.

FUSCO, C. A. D. S. Ensino de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial. In: MASETTO, M. T. **Ensino de Engenharia: técnicas para otimização das aulas**. São Paulo: Avercamp, 2007. p. 37 - 58.

ORTS, A.; LLINARES, S.; BOIGUES, F. J. Elementos para una Descomposición Genética del Concepto de Recta Tangente. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 10, p. 111 - 134, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. 3a edição. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. 1, 2015.

TALL, D. Computer Environments for the Learning of Mathematics. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R. W.; STRÄßER, **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer, 1994. p. 189 - 199.

TALL, D. Advanced Mathematical Thinking. **Mathematics Education Library**, Cambridge, 2002.