

## **A Interdisciplinaridade como perspectiva de ensino do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio: um estudo de caso.**

André Luigi da Silva<sup>1</sup>, Eric Pizzini Bernardo<sup>2</sup>; Kátia Regina Yabiku<sup>3</sup>

**Resumo** - No presente artigo apresentamos uma prática pedagógica bem sucedida através de uma abordagem interdisciplinar na Educação Básica, promovida pela disciplina eletiva intitulada: Matemática e a Física Natural, no Colégio Uirapuru, na cidade de Sorocaba-SP, que permite ultrapassar os limites do estabelecido no ensino médio, no período curricular obrigatório, trazendo ideias intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral. Para isso foram utilizadas ferramentas computacionais e a abordagem PBL (*Problem-Based Learning*) aplicados a um problema real. Os resultados demonstram os aspectos positivos da interdisciplinaridade, do uso da tecnologia e do ensino do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio.

**Palavras-chave:** cálculo no ensino médio, aprendizagem significativa, aprendizagem baseada em problemas.

**Abstract** - In this article we present a successful experience through an interdisciplinary approach of mathematics and physics, in Basic Education, promoted by the elective discipline entitled: Mathematics and Natural Physics, at Colégio Uirapuru, in the city of Sorocaba-SP, which allows to exceed the limits established in high school, in the mandatory curricular period, bringing intuitive ideas from the Differential and Integral Calculus. For that, computational tools and the PBL approach (*Problem-Based Learning*) were applied to a real problem. The results demonstrate the positive aspects of interdisciplinarity, the use of technology and the teaching of Differential and Integral Calculus in high school.

**Keywords:** high school calculus, meaningful learning, problem-based learning.

---

<sup>1</sup> Colégio Uirapuru. E-mail: andre.silva@colegiourapuru.com.br

<sup>2</sup> Colégio Uirapuru. E-mail: eric.bernardo@colegiourapuru.com.br

<sup>3</sup> Colégio Uirapuru. E-mail: katia.yabiku@colegiourapuru.com.br

## **1. Introdução**

A interdisciplinaridade pode proporcionar um trabalho dinâmico e facilitador da aprendizagem ao trabalhar os componentes curriculares interligados entre si, bem como uma maior motivação dos alunos envolvidos no trabalho.

Espera-se que a matemática do Ensino Médio possa ser entendida como uma ferramenta a ser aplicada nas mais diferentes situações, seja na sua vida profissional ou em seus estudos futuros. A partir disso, a antiga concepção de que na matemática é necessária apenas a memorização de fórmulas e a aplicação de mecanismos para efetuar cálculos, muitas vezes desconectados de qualquer problema de utilidade real, poderá ser abandonada.

O ensino de elementos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio é algo que está ao alcance dos alunos desse nível de ensino, desde que não seja cheio de formalismos como nos cursos superiores.

Neste artigo apresentamos uma experiência de aplicação da interdisciplinaridade, nas teorias matemáticas e modelos físicos abstratos em exemplos concretos de alto nível que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral, utilizando recursos tecnológicos presentes no cotidiano dos alunos, para constituir uma ferramenta de resolução de problemas reais, promovida pela disciplina eletiva Matemática e Física Natural do 3º ano do Ensino Médio no Colégio Uirapuru, em Sorocaba-SP.

Por meio de projetos coletivos, os alunos entraram em contato diretamente com problemas que conectam a interdisciplinaridade – matemática, física e a tecnologia. Verificando que os conceitos de física, podem ser representados através de uma modelagem matemática e lidos na forma de equações, funções matemáticas e gráficos, ou seja, a física pode utilizar a linguagem simbólica da matemática. O Cálculo Integral e Diferencial, estudado em aula, agora aplicado a um problema real, e ainda, o recurso tecnológico como instrumento para prever o resultado do processo teórico.

Sumarizando, um dos principais objetivos da disciplina é formar a percepção da aplicação cálculo na vida do aluno. Para isso, foi proposto um trabalho aos alunos, composto por uma apresentação de um recorte de artigo científico em que o cálculo é um facilitador do entendimento do mesmo. Seguindo esta linha, foram elaborados trabalhos de alto desempenho, contemplando diversas áreas do conhecimento e correlacionando os tópicos vistos na eletiva com os diversos trabalhos estudados.

## **2. Referencial Teórico**

## **A interdisciplinaridade como ferramenta pedagógica: horizontes potentes**

O ensino e aprendizagem de Matemática e Física em todos os níveis de escolaridade, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior, tem sido foco de diversos estudos. Os alunos frequentemente apresentam dificuldades na compreensão de conceitos das ciências exatas. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula. Essas dificuldades não se limitam apenas aos conceitos básicos, uma vez que os conteúdos dessa disciplina se encadeiam e é necessária a compreensão de uns para o aprendizado dos assuntos seguintes.

O educador Paulo Freire defende a importância de entender o universo de maneira geral, a partir do local social em que se está inserido, para, a partir disso, estudar as particularidades de cada assunto. Conforme explica no livro *Pedagogia do Oprimido*:

A questão fundamental, neste caso, está em que, faltando aos homens uma compreensão crítica da totalidade em que estão, captando-a em pedaços nos quais não reconhecem a interação constituinte da mesma totalidade, não podem conhecê-la. E não o podem porque, para conhecê-la, seria necessário partir do ponto inverso. Isto é, lhes seria indispensável ter antes a visão totalizada do contexto para, em seguida, separarem ou isolarem os elementos ou as parcialidades do contexto, através de cuja visão voltariam com mais clareza à totalidade analisada. (FREIRE, 2005, p. 111)

Freire defende que antes de fragmentar, de dividir o conhecimento em áreas específicas, e em diversas disciplinas, se faz necessário que o aluno obtenha uma compreensão concisa do contexto, para que nesse sentido, o aluno analise, compreenda e permita-se fazer uso crítico do conhecimento que cada área lhe proporciona. A partir do conhecimento específico de cada área, é possível partir para um trabalho interligado com diversas disciplinas, como por exemplo, um projeto ou uma atividade diferenciada em sala de aula, baseado em conteúdos comuns, ou até mesmo, utilizando um mesmo tema para então o relacionar a várias disciplinas.

É importante salientar, que o professor deve preocupar-se com a construção do projeto, e não apenas com o resultado final, conforme afirma Nogueira:

Por outro lado, a postura e a atitude interdisciplinar poderão garantir uma atuação mediadora do professor que, tal qual um facilitador, buscará o foco de interesse, facilitará o acesso aos materiais de pesquisa, indagará mais do que responderá, promoverá discussões, etc... Sempre preocupado mais com o processo do que com o produto, garantindo desta forma o sucesso do processo de aprendizagem. (NOGUEIRA, 2009, p. 132)

Nildo Nogueira acredita que o papel do docente na intermediação da construção do projeto interdisciplinar é muito importante para um resultado eficaz, ressaltando a importância do trabalho em equipe, que precisa ter um forte canal de comunicação entre os professores que a integram. Além disso, o comprometimento com a atividade proposta, estabelecendo tarefas e propondo

discussões sobre o tema abordado, são aliados valiosos para a busca de um produto final sólido e consistente.

### **O estudo do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio: uma abordagem interdisciplinar.**

Desenvolvido há cerca de 300 anos por Newton e Leibniz, o cálculo é uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas pelas ciências para reduzir a complexidade de problemas diversos.

A ideia intuitiva para o cálculo de áreas, aplicado por Arquimedes, é o processo que introduz o conceito de integral e que pode ser utilizado no Ensino Médio: Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retângulos construídos, tendendo sua base menor ao menor valor possível. (MACHADO, 2008, p.3)

Mas, grande parte dos alunos, frequentemente, demonstram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais, por não encontrarem sentido e tão pouca aplicação prática dos conceitos aprendidos na sala de aula, evidenciando a importância pedagógica da interdisciplinaridade como ferramenta de materialização conceitual.

Em seu artigo “Cálculo no segundo Grau”, o professor Roberto Costallat Duclos (DUCLOS, 1992) defende o cálculo no ensino médio, desde que seja apresentado de maneira conveniente. Segundo o autor, o Cálculo, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante, porque traz ideias inovadoras, pelo poder e pelo alcance de seus métodos.

### **3. Método**

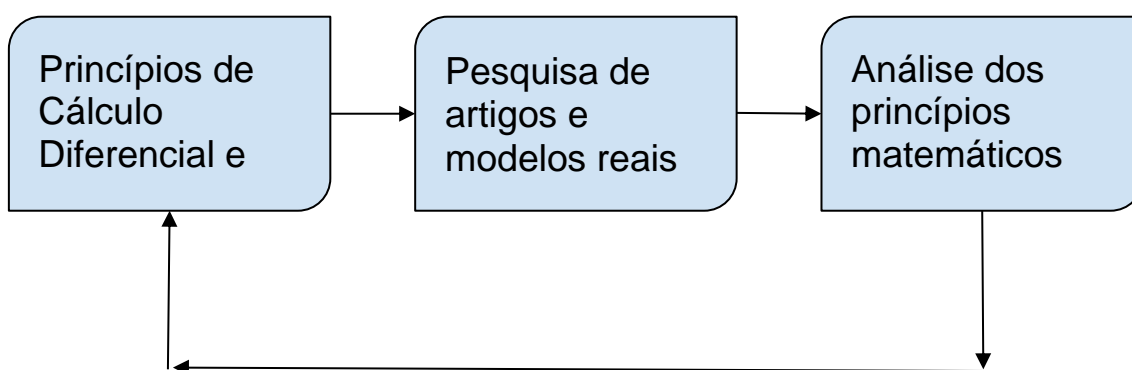
A disciplina foi cursada em encontros semanais de 1 hora e 15 minutos no período da tarde, e como é uma disciplina do itinerário formativo os alunos matriculados optaram por ela, logo é um perfil de aluno que possui uma afinidade com a linguagem matemática e a modelagem física.

No início o curso teve como objetivo desenvolver o conceito de limite de uma forma intuitiva, foi apresentado inicialmente um problema de aproximação de valores de um gráfico de uma função, com isso foi elaborado sequências de diferenças cada vez mais próximas à esse valor, definindo assim um dos conceitos mais abstratos de limite, e os intervalos definidos como  $\epsilon$  e  $\delta$ .

Após essa apresentação, iniciamos o estudo de técnicas para cálculo de limite, pois temos como objetivo secundário o preparo do aluno para o início do ensino superior, e inicialmente encetamos as aplicações desses conceitos em cinemática com aplicação em velocidade instantânea. A medida que os conceitos foram trabalhados ao longo das aulas, os alunos foram desenvolvendo

as habilidades exigidas e aplicando tais conceitos em problemas mais elaborados de física, tais como problemas de mecânica e eletrodinâmica.

Essa metodologia continuou sendo usada para o ensino do cálculo diferencial e integral, e como produto final foi solicitado um trabalho em grupo sobre a aplicação do cálculo nas várias áreas do conhecimento. A metodologia de trabalho proposta foi: os alunos deveriam escolher um artigo científico, de uma dada área de conhecimento a escolha deles, e elaborar quais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral estudados ao longo do ano foram utilizados no trabalho escolhido, evidenciando os porquês das suas escolhas. Além do estudo de tais conceitos, eles deveriam explicar como tais ferramentas foram utilizadas na pesquisa com base nos resultados explicitados nos trabalhos. De forma sintética, o seguinte fluxograma expressa a metodologia utilizada ao longo do curso.



**Figura 1:** Metodologia utilizada ao longo do curso: análise de ferramentas do cálculo em artigos e projetos reais. Retroalimentação autorai: os alunos como parte ativa do processo investigativo.

Foram realizados no total mais de 10 projetos autorais feitos pelos alunos, onde a pesquisa bibliográfica e posterior análise dos artigos foi feita e a linguagem matemática fornecida pelo cálculo verificada. Para o estudo de caso proposto neste trabalho, irão ser contemplados três projetos com seus respectivos eixos temáticos: *Relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme* (eixo temático: Física/Matemática), *Análise da obra: Cálculo, um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica* (eixo temático: Economia /Matemática) e *Um estudo sobre epidemiologia matemática: a doença de Chagas* (eixo temático: Biologia/Matemática)

A escolha desses projetos foi feita pela relevância teórica do projeto dentro de cada eixo citado, correlacionando o fenômeno discutido com a devida linguagem matemática e pela precisão da análise elaborada pelos alunos ao conectar as ferramentas trabalhadas ao longo da eletiva com o devido formalismo matemático demonstrado nos artigos estudados.

#### 4. Resultados e Discussão

Como esboçado na introdução teórica, a ideia central da eletiva era que o discente criasse uma visão sistêmica sobre os tópicos relativos ao estudo do cálculo, integrando-os na sua aplicação direta em modelagens físicas de fenômenos naturais. A partir dessa premissa, eles conseguiram assimilar os conceitos vistos em diversos trabalhos acadêmicos, evidenciando os tópicos vistos na eletiva com suas aplicações práticas. Como evidências empíricas houve a revisão bibliográfica de vários trabalhos acadêmicos, conectando as ferramentas conceituais trabalhadas na eletiva com aplicações e modelagens para problemas reais. Dentre os projetos apresentados, três estudos são analisados para compor os resultados propostos.

### **1. Relação entre o movimento harmônico simples e o movimento circular uniforme (eixo temático: Física/Matemática)**

Neste projeto, os alunos analisaram um trabalho referente a construção do movimento harmônico simples como projeção do movimento circular uniforme. O artigo estudado (SILVA, 2018), relaciona o movimento de uma roda de bicicleta, tido como circular e uniforme, com as componentes verticais e horizontais do movimento harmônico simples, em termos trigonométricos. Ao estudar o movimento da roda, ainda é possível mensurar as variações das grandezas lineares e angulares ao longo do tempo, evidenciando o estudo das derivadas de primeira ordem associadas ao fenômeno.

Os alunos correlacionaram a taxa de variação da posição linear da roda, com a velocidade linear da mesma, aplicando o conceito de derivada visto ao longo da eletiva. Ainda, deduziram de maneira correta a aceleração da roda, como sendo a derivada de primeira ordem da velocidade linear. Para finalizar, com o uso da aceleração, deduziram a força aplicada com o auxílio da segunda lei de Newton, explicitando a existência de uma constante  $K$  ao movimento do corpo. Desta forma, conseguiram fixar os conceitos vistos na eletiva, com a demonstração de relações físicas que não chegam a ser contempladas na sua totalidade em sala de aula, dada a profundidade do tema em questão. Segundo os próprios discentes:

É possível ver o conceito de derivada claramente quando se estuda a relação entre movimento oscilatório e movimento circular uniforme (nas relações entre espaço, velocidade e aceleração). É uma matéria que estudamos nas aulas de mecânica, porém sem a noção de cálculo (que foi explorada na eletiva), e portanto esse artigo, ou melhor, esse experimento, ajuda a visualizar e estudar esses movimentos.

### **2. Análise da obra: Cálculo, um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica (eixo temático: Economia/Matemática)**

Neste projeto, os alunos analisaram um projeto que descrevia uma análise da função custo de um dado produto, em função das unidades produzidas do mesmo. O artigo estudado (BARROS, 2013) relaciona a função custo de um dado produto com sua quantidade, e mostrava como a variação da quantidade de produtos influenciava no seu custo, variação essa chamada de

custo marginal. Os alunos interpretaram essa variação como a derivada de primeira ordem da função custo em relação à quantidade produzida, e estabeleceram a conexão dessa conceito com o limite matemático envolvido.

Assim, ao se estudar essa variação, pode-se determinar uma ferramenta de análise do custo do produto para pequenas oscilações na quantidade produzida, e estabelecer uma ferramenta de estudo da viabilidade do aumento da produção, e se essa variação iria ter uma alta repercussão no custo final do produto, em torno de um dado ponto de produção arbitrário. Tal grau de previsibilidade é requerida pelas empresas, pois pode-se estimar para qual faixa de produção teremos o maior retorno financeiro. Segundo os próprios discentes:

“Neste capítulo, visamos compreender a variação de um conceito básico da economia como custo e, para isso, utilizamos a derivação a partir de seu conceito primário: taxa de variação de  $y$  por  $x$ . [...] Logo, o custo de produção e o custo marginal são iguais quando o nível de produção é  $q_0$ , ou seja, quando o custo de se produzir uma unidade a mais do produto não influencia no seu preço médio. Tomando os dois conceitos juntos, eles são muito importantes para a tomada de decisões dentro da empresa com base na estatística e nos dados observados sobre o comportamento da demanda.”

### **3. Um estudo sobre epidemiologia matemática: a doença de Chagas (eixo temático: Biologia/Matemática)**

Neste projeto, os alunos analisaram um modelo epidemiológico clássico para proliferação de doenças que busca modelar o número de contágios em uma dada população via funções que dependem de múltiplas variáveis. O artigo estudado (JÚNIOR, 2002) elabora de maneira sofisticada o número de pessoas contaminadas em uma dada população pela doença de Chagas, doença infecciosa transmitida em grande parte pelo contágio horizontal do contato do vetor da doença com a população. No estudo, é utilizado o modelo SIR, sigla em inglês para as funções construídas, a se saber: pessoas suscetíveis, infectadas e recuperadas. A ideia do modelo é propor uma série de equações diferenciais para o estudo de cada uma dessas funções, com base em parâmetros biológicos pertinentes.

Assim, os alunos estudaram as taxas de variações dessas populações como funções do tempo, e associaram essas taxas com os valores da derivada em relação ao tempo. Pode-se então, concluir de maneira qualitativa como a taxa de população infectada e a taxa de população não infectada se comportam ao longo do tempo, permitindo a tomada de decisões conscientes com relação a doença, em relação ao seus eventuais picos de contágio ou quedas acentuadas na transmissão. Ainda, estudou-se um parâmetro para mensuração do crescimento da população infectada em relação a não infectada, como um índice de variação da população infectada, com bases nessas derivadas. Assim, segundo os próprios discentes:

Uso da matemática na epidemiologia.

- Analisar como a doença desenvolve-se na população.

- Permite efetivação de medidas direcionadas para a doença e seu funcionamento

Derivada

- Analisa algo em função do tempo
- Entende como as taxas vão variar ao longo do tempo.
- Permite prever se haverá aumento da população livre da doença ou infectada.
- Permite modelar taxas de variação para doenças específicas.

Pode-se, então, resumir os principais pontos apresentados nos resultados acima, na seguinte tabela, onde evidencia-se as premissas adotadas no referencial teórico: visão sistêmica do cálculo diferencial e integral e suas ferramentas, vinculadas com os estudos feitos pelos discentes.

Trabalho abordado	Eixo temático	Resultados observados	Aplicações e ferramentas oriundas do Cálculo
Relação entre MHS e MCU.	Física/Matemática	-Dedução das funções horárias pertinentes  -Dedução da força resultante no sistema.	-Derivadas e taxas de variação.
Estudo do custo de um produto em função da quantidade produzida.	Economia/Matemática	-Pontos de otimização de custo em função da quantidade produzida.  -Análise de taxas de crescimento e decrescimento de funções.	-Estudo de limites.  -Derivadas e taxas de variação.  -Pontos de máximo e mínimo locais.
Análise epidemiológica da doença de Chagas.	Biologia/Matemática	- Parâmetros de infecção de uma população.  - Análise de surtos e controle de doenças infecciosas.	-Derivadas e taxas de variação.  -Estudo do comportamento de funções: pontos críticos e taxas de crescimento e decrescimento.

Tabela 1 - Resumo dos principais resultados obtidos: correlação direta entre os conceitos vistos na eletiva com os trabalhos estudados pelos alunos.



## 5. Considerações finais

O objetivo do presente trabalho era evidenciar, de maneira direta e com evidências empíricas, como a abordagem multidisciplinar pode corroborar para uma aprendizagem efetiva do Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio: ao estudar trabalhos que relacionassem diferentes áreas do conhecimento, às ferramentas oferecidas pelo Cálculo, os alunos puderam corporificar os conceitos vistos em sala, atuando na análise de problemas reais. Dessa forma, foram trabalhadas diversas áreas com os alunos, desde a leitura de produções acadêmicas, análise e escrita de textos científicos, estudo de conceitos matemáticos abstratos e sua utilização prática em diferentes contextos.

O formalismo matemático exigido pelos trabalhos limitou o escopo dos projetos feitos pelos alunos, porém dados os resultados apresentados, fica evidente que as relações estabelecidas nos projetos se ressignificam os conceitos vistos em sala de maneira enriquecedora. Ainda, nota-se que o método PBL também teve papel fundamental nesse processo, pois fornece ao educando uma base palpável para as ferramentas vistas em sala, oferecendo uma perspectiva rica para o ensino do Cálculo para alunos nessa etapa curricular.

## Referências

CONTIERO, L. O.; GRAVINA, M. A. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 9, p. 01-10, 2011.

DUCLOS, Robert Costallat. Cálculo do 2º grau. In: *Revista do Professor de Matemática*, n.20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.26-30.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do Oprimido*. 48. Reimpressão. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005.

NOGUEIRA, Nilbo Ribeiro. *Pedagogia dos Projetos: Uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências*. 7ª Ed. São Paulo: Érica, 2007.

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo. *O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral*. 2002, 94p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Florianópolis: UFSC.

SILVA, E. S. Estudo da relação entre o movimento circular uniforme e o movimento harmônico simples utilizando a videoanálise de uma roda de bicicleta. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, nº 2, e2301, 2018.

BARROS, L. E. W. B. Cálculo, um estudo de suas aplicações às áreas financeira e econômica. Trabalho de conclusão de curso. João Pessoa: UFPB, 2013.

JÚNIOR, D. S. A. Um Estudo sobre Epidemiologia Matemática A Doença de Chagas. Dissertação (Mestrado em matemática aplicada.) Campinas: Unicamp, 2002.